

# DLOUHÁ PAMĚŤ A JEJÍ VÝVOJ VE VÝNOSECH BURZOVNÍHO INDEXU PX V LETECH 1997–2009

Ladislav Křišťoufek, IES FSV Univerzity Karlovy v Praze a ÚTIA Akademie věd ČR\*

---

## Úvod

Procesy s dlouhou pamětí jsou součástí mladého oboru mezi statistickou fyzikou, ekonometrií a ekonomii – ekonofyzikou. Tato disciplína aplikuje metody používané v přírodních vědách na ekonomické a finanční systémy. Samotné procesy s dlouhou pamětí<sup>1</sup> spojené s odhadem Hurstova exponentu prodělaly během posledních let dramatický vývoj jak v teorii, tak i v metodách a aplikacích. Základním principem daného přístupu je popsat celý systém jedinou hodnotou, která v sobě zahrnuje zároveň komplexitu a jednoduchost. Tímto číslem je již zmíněný Hurstův exponent. Pomocí jeho hodnoty můžeme posoudit, zda je zkoumaná řada predikovatelná či náhodná. Problematika predikovatelnosti burzovních výnosů je velice podstatnou součástí finanční analýzy při sestavování investičních portfolií a při konstrukci investičních fondů (Janda a Svárovská, 2009, 2010). Přítomnost dlouhé paměti má navíc důležitý vliv na oceňování opcí a management rizik.

Český burzovní index PX, kterým se zabývá analytická část tohoto článku, analyzoval již Janda (1994). Náhodností a efektivitou indexu, společně se srovnáním s ostatními středoevropskými indexy, se zabývali Hájek (2007) a Diviš a Teplý (2005) a poukázali na zlepšující se efektivitu v čase. Různé testy efektivity, ve kterých zahrnul i test na přítomnost dlouhé paměti, aplikoval na index PX i jednotlivé akcie Tran (2007) a pro samotný index pomocí většiny testů náhodnou procházku zamítl, avšak pro jednotlivé akcie nebyly výsledky jednoznačné. Tran (2005) také analyzoval dlouhou paměť ve výnosech českého indexu PX mezi roky 1993 a 2004 a našel signifikantní persistenci. Podobně Cajueiro a Tabak (2006) zkoumali dlouhou paměť ve výnosech transitivity ekonomik a pro PX mezi roky 1994 a 2004 ji našli. Přítomnost signifikantní dlouhé paměti navíc poukazuje na komplexní dynamiku v samotném zkoumaném procesu. Nelineárními komplexními systémy (konkrétně neuronovými sítěmi) na akciových trzích střední Evropy se zabýval Baruník (2008) a ukázal, že tyto systémy lépe popisují chování daných trhů.

Tento článek prezentuje dvě často používané metody pro odhad Hurstova exponentu – metodu přeškálovaných rozsahů a periodogramovou metodu. Jelikož je však většina metod vychýlená při přítomnosti procesu s krátkou pamětí, jako například

---

\* Článek vznikl za podpory grantu GAČR 402/09/H045, grantu GAUK 118310 a grantu MŠMT 0021620841.

1 Názvosloví k danému tématu je téměř výhradně anglické. Tato práce se pokouší zavést české ekvivalenty k daným pojmům. Původní označení je vždy uvedeno v poznámce pod čarou pro lepší orientaci v cizojazyčné odborné literatuře.

ARMA procesy, použijeme dále i metodu promíchání s pohyblivými bloky, pomocí které sestavíme konfidenční intervaly pro testování hypotézy o nepřítomnosti procesu s dlouhou pamětí ve zkoumané řadě. Daná metoda je navíc odolná vůči odlišným rozdělením, heteroskedasticitě či trendování, jejichž vliv je ve většině aplikované literatury opomíjen. Sekce 1 obsahuje základní definice sebedobnosti a dlouhé paměti v časových řadách. Sekce 2 se zaměřuje na detailní popis již zmíněných metod pro odhad Hurstova exponentu. V Sekci 3 popisujeme metodu promíchávání s pohyblivými bloky společně s volbou důležitých parametrů jak pro metody odhadu Hurstova exponentu, tak pro zmíněnou metodu promíchávání. Nakonec v Sekci 4 aplikujeme dané metody na určení časově závislého Hurstova exponentu na výnosy indexu PX mezi roky 1997 a 2009. Docházíme k závěru, že PX byl mezi roky 1998 a 2003 signifikantně predikovatelný, avšak tato předvídatelnost se v čase snižovala. Navíc prezentujeme i důležité poznatky ohledně dvou použitých metod a potenciální krátké paměti v procesu. Článek uzavírá shrnutí.

## 1. Sebedobnost a dlouhá paměť v časových řadách

Základní myšlenkou sebedobnosti<sup>2</sup> jsou stejné, či alespoň podobné, statistické vlastnosti procesu v jakémkoliv měřítku po vhodném přeškálování<sup>3</sup> (nejjednodušším způsobem je standardizace). Standardizované denní výnosy za dané časové období, pokud jsou sebedobné, pak mají podobné statistické vlastnosti jako týdenní či měsíční výnosy po standardizaci za stejné časové období. Nejjednodušeji lze definovat sebedobnost na základě rozdělení (Samorodnitsky, 2006). Proces je pak sebedobný, pokud platí, že  $X(at) \rightarrow a^H X(t)$ , kde  $a$  je kladná konstanta a  $H$  je parametr sebedobnosti, pro který platí  $0 < H < 1$ .

Parametr sebedobnosti  $H$  se nazývá také Hurstův exponent po vodním inženýrovi Haroldu Edwinu Hurstovi (Hurst, 1951). Označení  $H$  pak dal exponentu Benoît Mandelbrot (Mandelbrot, van Ness, 1968), který výrazně přispěl k rozvoji teorie sebedobnosti a dlouhé paměti v jejich počátečních letech (např. Mandelbrot, Wallis, 1969; Mandelbrot, 1970; a Mandelbrot, 1972).

Důležitější implikace sebedobnosti pro časové řady vyplývají nikoliv z distribucí, ale z dynamických vlastností řad, které mohou být jednoduše popsány autokorelační funkcí (Eichner *et al.*, 2007)

$$\rho(k) = \frac{\sum_{t=0}^{T-k} (X_t - \mu)(X_{t+k} - \mu)}{\sigma^2(T-k)}, \quad (1)$$

kde  $X_t$  je náhodná proměnná,  $T$  je délka časové řady,  $k$  je počet zvolených zpoždění,  $\mu$  je střední hodnota, tedy průměr, a  $\sigma$  je konečná směrodatná odchylka. Dále definujeme spektrální hustotu  $f(\omega)$  přes spektrální distribuční funkci  $F(\omega)$ , pro kterou platí

$$f(\omega) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\omega} dF(\omega). \quad (2)$$

2 Označení v zahraniční literatuře jsou „self-similarity“ či „self-affinity“, které sice nejsou definičně stejné, avšak z hlediska analýzy časových řad jsou rozdíly zanedbatelné.

3 Označení škála a reškálování či přeškálování v tomto textu je ekvivalentní s anglickými výrazy „scale“ a „rescaling“.

Procesy s dlouhou pamětí pak definujeme v časové a frekvenční doméně postupně podle následujících limitních předpisů:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\rho(k)}{c_t k^{2(H-1)}} = 1 \quad (3)$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{f(\omega)}{c_f |\omega|^{1-2H}} = 1 \quad (4)$$

Kritickou hodnotou Hurstova exponentu je 0,5, která implikuje dva možné procesy – nezávislý proces či proces s krátkou pamětí (Beran, 1994; a Lillo, Farmer, 2004). Nezávislý proces má nulovou autokorelaci pro všechna zpoždění. Proces s krátkou pamětí má nenulové korelace pro nízká zpoždění, avšak nulové korelace pro vysoká zpoždění.

Proces s Hurstovým exponentem vyšším než 0,5 má kladné korelace pro všechna zpoždění a je pak nazýván jako persistentní proces<sup>4</sup> (Mandelbrot, van Ness, 1968). Korelace takového procesu klesají hyperbolicky a jejich suma je nekonečná (Beran, 1994). Na druhou stranu, pro Hurstův exponent nižší než 0,5 má proces záporné korelace pro všechna zpoždění a je nazýván anti-persistentní<sup>5</sup> (Mandelbrot, van Ness, 1968). Proces má opět hyperbolicky klesající korelace, jejichž suma je však konečná (Embrechts, Maejima, 2002). Persistentní proces pak implikuje, že kladná hodnota je statisticky častěji následovaná kladnou hodnotou či naopak (v řadě pozorujeme méně bodů zvratu než u náhodného procesu). Naproti tomu, anti-persistentní proces implikuje, že kladná hodnota je statisticky častěji následovaná zápornou hodnotou a naopak (Vandewalle, Ausloos, Boveroux, 1997). Pokračujeme metodami pro odhad Hurstova exponentu.

## 2. Metody pro odhad Hurstova exponentu

V této sekci se zaměříme na podrobný popis dvou metod pro odhadnutí Hurstova exponentu – metodu přeškálovaného rozsahu z časové domény a periodogramovou metodu z frekvenční domény.<sup>6</sup> Při popisu metody přeškálovaného rozsahu se zaměříme i na metodu modifikovaného přeškálovaného rozsahu,<sup>7</sup> která se snaží odstranit dvě slabiny nemodifikované metody, a to použití pro heteroskedastické řady a procesy s krátkou pamětí.

4 V zahraniční literatuře jsou názvy pro persistentní proces velmi různorodé – “long-range dependent” (Beran, 1994), “long-memory process” (Lillo, Farmer, 2004), “persistent process” (Mandelbrot, van Ness, 1968) a “black noise” (Peters, 1994).

5 Podobně jako pro persistentní proces existuje v zahraniční literatuře větší množství ekvivalentních označení – “short-range dependence” (Beran, 1994), “anti-persistent” (Mandelbrot, van Ness, 1968), “intermediate memory process” (Barkoulas, Baum, Travlos, 2000) a “pink noise” (Peters, 1994).

6 Původní označení pro metody je „rescaled range analysis“ a „periodogram“.

7 Metoda je v zahraniční literatuře označována jako „modified rescaled range analysis“.

## 2.1 Metoda přeškálovaného rozsahu a modifikovaného přeškálovaného rozsahu

Metoda přeškálovaného rozsahu (R/S) je nejstarší metodou určení Hurstova exponentu, byla vyvinuta H. E. Hurstem (Hurst, 1951) a na finanční řady byla metoda poprvé použita v 70. letech 20. století (Mandelbrot, 1970).

Postup pro určení Hurstova exponentu danou metodou můžeme rozdělit do deseti kroků (Peters, 1994; a Samorodnitsky, 2007):

*Krok 1:* Převědeme původní řadu hodnot  $(P_0, P_1, \dots, P_T)$  na řadu logaritmických (spojitých) výnosů  $(r_1, r_2, \dots, r_T)$ , kde

$$r_i = \log P_i - \log P_{i-1} \quad \text{pro} \quad i = 1, 2, \dots, T. \quad (5)$$

*Krok 2:* Rozdělíme časovou řadu o délce  $T$  na  $N$  sousedících období o délce  $v$ , zatímco  $N \cdot v = T$ . Každé období je pak označeno jako  $I_n$  pro  $n = 1, 2, \dots, N$ . Navíc označíme prvky v období  $I_n$  jako  $r_{k,n}$  pro  $k = 1, 2, \dots, v$ .

*Krok 3:* Pro každé období  $I_n$  určíme průměrný výnos jako

$$\bar{r}_n = \frac{1}{v} \sum_{k=1}^v r_{k,n} \quad (6)$$

*Krok 4:* Sestrojíme novou řadu akumulovaných odchylek od aritmetického průměru (profil řady) pro každé období jako

$$X_{k,n} = \sum_{i=1}^k (r_{i,n} - \bar{r}_n). \quad (7)$$

*Krok 5:* Spočteme rozsah definovaný jako rozdíl maxima a minima profilu pro každé období, tedy

$$R_{I_n} = \max(X_{k,n}) - \min(X_{k,n}). \quad (8)$$

*Krok 6:* Určíme výběrovou směrodatnou odchylku výnosů jako

$$S_{I_n} = \sqrt{\frac{1}{v-1} \sum_{k=1}^v (r_{k,n} - \bar{r}_n)^2}. \quad (9)$$

*Krok 7:* Každý rozsah je standardizován související směrodatnou odchylkou a tvoří tak přeškálovaný rozsah jako

$$(R/S)_{I_n} = \frac{R_{I_n}}{S_{I_n}}. \quad (10)$$

*Krok 8:* Zopakujeme celý postup pro každé období o délce  $v$  a získáme průměrný přeškálovaný rozsah jako

$$(R/S)_v = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (R/S)_{I_n}. \quad (11)$$

*Krok 9:* Délka  $v$  je zvýšena a celý proces se zopakuje. Konkrétní délky se v literatuře liší. Zde volíme metodu, která vychází z teorie multiplikativních kaskád, které souvisí s řadami s dlouhou pamětí (Lux, 2007), a použijeme délky škál jako přirozené mocniny čísla 2 (Weron, 2002).

*Krok 10:* Získáme průměrné přeškálované rozsahy  $(R/S)_v$  pro dané délky  $v$ . Přeškálované rozsahy pak splňují vztah

$$(R/S)_v \approx c * v^H, \quad (12)$$

kde  $c$  je konečná konstanta nezávislá na  $v$  a  $H$  je Hurstův exponent (Taqqu, Teverovsky, Willinger, 1995).

Metodou nejmenších čtverců ve dvojité logaritmickém měřítku odhadneme Hurstův exponent ze vztahu

$$\log(R/S)_v \approx \log c + H \log v. \quad (13)$$

R/S analýza je známá a užívaná po dlouhou dobu, za kterou byla podrobena testování a kritice. Ta se na metodu snáší kvůli problémům s heteroskedastickými daty (Di Matteo, 2007) a procesy s krátkou pamětí jako ARMA a GARCH (Lo, MacKinlay, 1999; a Alfí *et al.*, 2008). Heteroskedasticita je problémem kvůli užití výběrové směrodatné odchylky (rovnice 9) a společně s filtrací pouze konstantního trendu ve výnosech (rovnice 7) tak celou metodu oslabuje oproti nestacionaritám v procesu. Stacionarita se dá však dobře testovat (např. ADF a KPSS test) a v jejím případě se přistupuje k metodám, které jsou pro nestacionární řady vyvinuty. Pro procesy s možnou krátkou pamětí byla R/S analýza upravena (Lo, 1991) a využívá se jako metoda modifikovaných přeškálovaných rozsahů (M-R/S), na kterou se podrobněji zaměříme.

Zásadním rozdílem M-R/S oproti R/S je užití upravené výběrové směrodatné odchylky. Takto je metoda méně citlivá oproti krátké paměti i heteroskedasticitě. Nová rovnice pro upravenou výběrovou směrodatnou odchylku je pak definována pomocí autokovariance  $\gamma$  pro každou periodu  $I_n$  až do zpoždění  $\xi$  jako

$$S_{I_n}^M = \sqrt{S_{I_n}^2 + 2 \sum_{j=1}^{\xi} \gamma_j \left(1 - \frac{j}{\xi + 1}\right)}. \quad (14)$$

R/S se tak stává speciálním případem M-R/S při  $\xi = 0$  (Dülger, Ozdemir, 2005). Nejdůležitějším krokem modifikované metody se stává určení počtu zpoždění, která se použijí pro určení upravené směrodatné odchylky (Wang *et al.*, 2006). Pokud je počet zpoždění příliš nízký, signifikantní závislost ve vzdálenějších zpožděních může být vynechána, a tudíž je odhadnutý Hurstův exponent stále vychýlený krátkou pamětí. Na druhou stranu, pokud zvolíme příliš vysoké zpoždění, je odhad opět zkreslený (Teverovsky, Taqqu, Willinger, 1999).

Velká část autorů neřeší volbu optimálního zpoždění a pouze odhadne Hurstův exponent či  $V$  statistiku, kterou nadefinujeme později, pro různá zpoždění. Výsledky jsou pak interpretovány na základě srovnání daných odhadů (Zhuang, Gree, Maggioni, 2000; a Alptekin, 2006). Existují i metody pro automatické určení optimálního zpoždění. Lo (1991) určuje zpoždění podle délky periody a autokorelace prvního řádu jako  $\hat{\rho}(1)$

$$\xi^* = \left[ \left( \frac{3v}{2} \right)^{\frac{1}{3}} \left( \frac{2\hat{\rho}(1)}{1 - (\hat{\rho}(1))^2} \right)^{\frac{2}{3}} \right]. \quad (15)$$

Poznamenejme, že optimální zpoždění se určuje pro každou jednotlivou periodu v proceduře odhadu Hurstova exponentu. Při metodě M-R/S se využívá  $V$  statistika, která je používána pro testování stability Hurstova exponentu (Hurst, 1951), pro signi-

fikantní dlouhou paměť pro konkrétní škálu (Lo, 1991) a rozpoznávání cyklů v časové řadě (McKenzie, 2002). Tato statistika je definovaná jako

$$V_v = \frac{(R/S)_v}{\sqrt{v}}. \quad (16)$$

Je zřejmé, že pro nezávislý proces je  $V$  statistika konstantní pro měnící se škály. Pro persistentní proces je statistika rostoucí a pro anti-persistentní proces nakonec klesající. Pokud tedy  $V$  statistika mění své chování, lze mluvit o přechodu v chování Hurstova exponentu. Jako další metody pro odhalení změn v chování lze použít bodové derivace<sup>8</sup> Hurstova exponentu (Bashan et al., 2008). Tyto derivace jsou nadefinovány jako sklony mezi jednotlivými průměrnými přeškálovanými rozsahy.

## 2.2 Periodogramová metoda

Periodogramová metoda je založena na vlastnostech spektrální hustoty  $f(w)$  v nejnižších frekvencích  $w \rightarrow 0$ . Jelikož je spektrální hustota inverzní Fourierovskou transformací autokorelační funkce, můžeme  $f(w)$  odhadnout pomocí inverzní Fourierovské transformace autokorelační funkce, která je známá jako periodogram  $I_T(w)$ , kde  $T$  je délka časové řady a  $w$  je frekvence (Geweke, Porter-Hudak, 1983; Weron, 2001). Periodogram je pak nadefinován jako

$$I_T(\omega_k) = \frac{1}{T} \left| \sum_{t=1}^T x_t e^{-2\pi i(t-1)\omega_k} \right|^2, \quad (17)$$

kde  $\omega_k = k/T$  pro  $k = 1, \dots, T/2$ . Pro periodogram blízko počátku, tedy pro  $w \rightarrow 0$ , platí

$$I_T(\omega_k) = c_f |\omega_k|^{1-2H}. \quad (18)$$

Podobně jako u metody R/S odhadneme Hurstův exponent  $H$  metodou nejmenších čtverců aplikovanou na zlogaritmovanou rovnici 18, kde tedy získáme

$$\log I_T(\omega_k) = \log c_f + (1-2H) \log |\omega_k|. \quad (19)$$

## 3. Nastavení parametrů a testování hypotéz

V této sekci se zaměříme na nastavení parametrů pro periodogramovou metodu a metodu přeškálovaných rozsahů. Zároveň zavedeme metodu promíchávání s pohyblivými bloky, pomocí které budeme konstruovat konfidenční intervaly pro testování hypotézy o nepřítomnosti procesu s dlouhou pamětí.

### 3.1 Promíchávání s pohyblivými bloky

Jelikož je většina metod pro odhad Hurstova exponentu  $H$  vychýlená přítomností procesu s krátkou pamětí, je třeba tuto možnost zahrnout do testování základní hypotézy o nepřítomnosti dlouhé paměti v testované časové řadě. Pro tento případ

<sup>8</sup> Původní označení v zahraniční literatuře je „point to point derivatives“.

použijeme metodu promíchávání s pohyblivými bloky (MBB).<sup>9</sup> Metoda je založena na následujících krocích.

*Krok 1:* Původní časovou řadu výnosů  $r_1, \dots, r_T$  přefiltrujeme autoregresivním procesem prvního řádu AR(1) a získáme rezidua  $e_1, \dots, e_T$ .

*Krok 2:* Rezidua vycentrujeme okolo průměrné hodnoty a získáme centrovaná rezidua

$$e_{i,c}, \text{ pro která platí } \varepsilon_{i,c} = \varepsilon_i - \sum_{i=1}^T \varepsilon_i / T.$$

*Krok 3:* Řadu centrovaných reziduí rozdělíme na  $m$  bloků o délce  $\zeta$  tak, že platí  $m\zeta = T$ .

*Krok 4:* Bloky centrovaných reziduí náhodně promícháme.

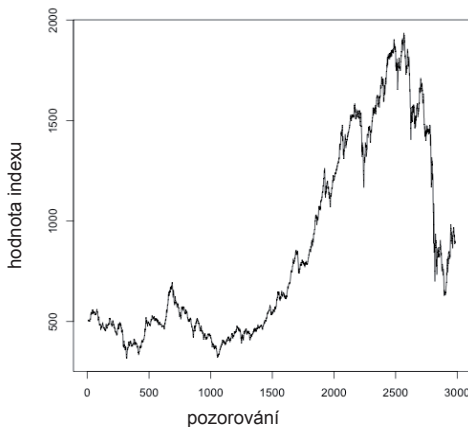
*Krok 5:* Z promíchaných centrovaných reziduí sestavíme procesem použitým v Kroku 1 novou řadu.

*Krok 6:* Na nové řadě odhadneme Hurstův exponent a opakujeme  $B$ -krát. Pomocí  $B$  odhadů sestavíme konfidenční intervaly pro testování hypotézy o nepřítomnosti procesu s dlouhou pamětí.

Základní myšlenkou metody MBB je přetrhání dlouhodobých vazeb v časové řadě a ponechání krátkodobých vazeb společně s distribucí, potenciální heteroskedasticitou a trendováním (Efron, 1979; Srinivas, Srinivasan, 2000). Pokud je náš odhad pro původní řadu výrazně odlišný od odhadů založených na MBB, můžeme zamítnout hypotézu o nepřítomnosti procesu s dlouhou pamětí v původní časové řadě.

Obrázek 1

#### Vývoj hodnot indexu PX



9 Metoda je označována jako “moving block bootstrap”.

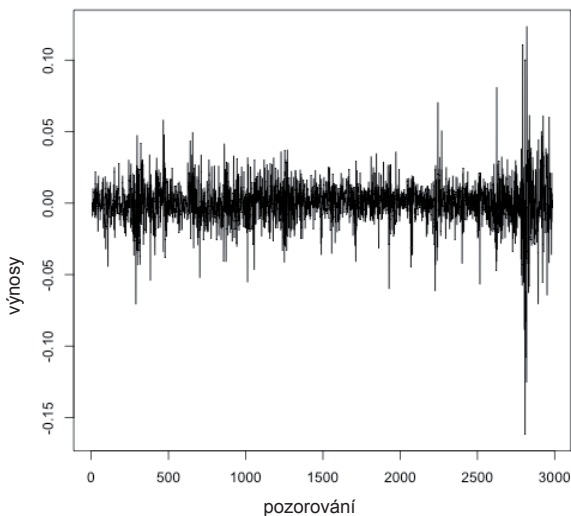
### 3.2 Parametry metod

V analýze použijeme časově závislý Hurstův exponent (Grech, Mazur, 2004) s konfidenčními intervaly založenými na metodě MBB. Jelikož použití MBB zajistí robustnost našich odhadů vůči krátké paměti v rámci konfidenčních intervalů, použijeme pouze R/S a periodogramovou metodu. Efektivita uvedených metod je závislá na volbě důležitých parametrů.

Pro R/S je důležitá volba nejnižší a nejvyšší škály  $v$ . Jelikož metoda používá směrodatnou odchylku, může být při malém počtu pozorování její odhad vychýlen. Volíme nejnižší škálu  $v_{min}$  rovnu 16 pozorováním na základě doporučení ostatních autorů. Stejný časový interval použijeme i jako krok v časově závislém Hurstově exponentu, abychom dostali srovnatelné výsledky. Jakákoliv volba  $v_{min}$  totiž do časově závislého  $H$  zanáší autokorelaci. Dále v metodě určujeme průměrný přeškálovný rozsah. Při malém počtu těchto statistik může jedno odlehle pozorování celkový odhad výrazně ovlivnit. Opět podle doporučení ostatních autorů volíme nejvyšší použitou škálu  $v_{max}$  jako jednu čtvrtinu celkové délky časové řady (Peters, 1994; Grech, Mazur, 2004; Matos *et al.*, 2008; Alvarez-Ramirez, Rodriguez, Echeverria, 2005; a Einstein, Wu, Gil, 2001).

Obrázek 2

Logaritmické výnosy indexu PX

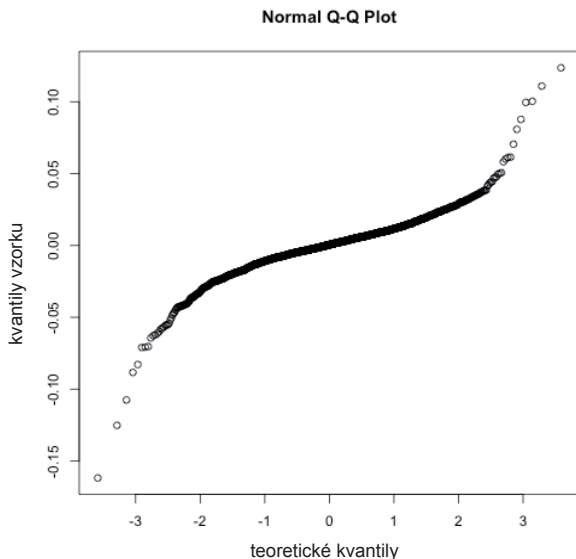


Periodogramová metoda má pouze jeden důležitý parametr, který můžeme zvolit, a to jak aproximujeme výraz  $w \rightarrow 0$ . Taqqu, Teverovsky a Willinger (1995) doporučují použít 10% nejnižších frekvencí. Tohoto doporučení se držíme i v naší analýze.

Posledními parametry, které je třeba nadefinovat, jsou pro metodu MBB. Velikost bloku  $\zeta$  volíme jako  $v_{min}/2$ , čímž se vyhneme potenciálním problémům pro případ, že nejnižší použitá škála je rovna velikosti bloku, čímž by průměrná R/S statistika zůstávala stejná pro nejnižší škálu. Nakonec pro konstrukci konfidenčních intervalů použijeme 100 odhadů pomocí MBB. Pro R/S i periodogramovou metodu volíme délku časové řady jako 512 a 1024 pro možné srovnání výsledků.



Obrázek 3  
QQ-plot výnosů PX



#### 4. Data a výsledky

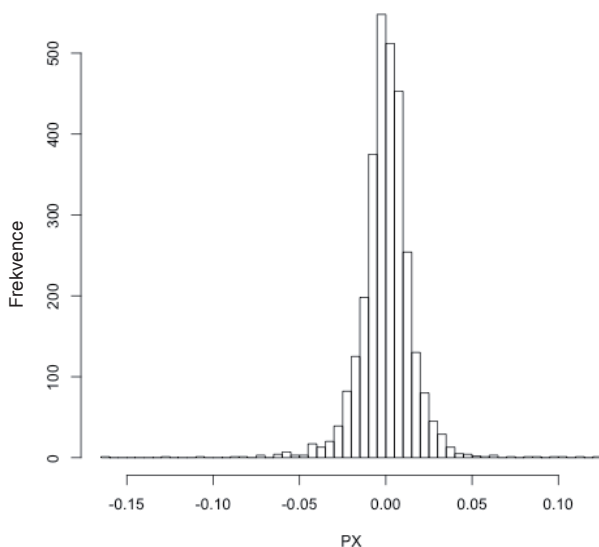
Zkoumáme přítomnost procesu s dlouhou pamětí ve vývoji logaritmických výnosů indexu Burzy cenných papírů Praha v České republice – tedy burzovního indexu PX – v období od 1. 7. 1997 do 30. 6. 2009 (2984 pozorování).<sup>10</sup> Analýza burzovních indexů je důležitá pro možnou konstrukci portfolií, které kopírují samotný index jakožto dostatečně diverzifikovaný koš aktiv. Navíc index poskytuje důležité informace o chování celého trhu a vyspělost akciových trhů je často analyzována právě na základě srovnání burzovních indexů (Di Matteo, 2007).

Index PX byl v letech 2008 a 2009 výrazně zasažen finanční krizí, což se projevilo ve zvýšené volatilitě, a tedy i možné nestacionaritě (obrázek 1 a 2). Stacionarita však není porušena podle KPSS testu (Kwiatkowski et al., 1992) při hodnotě 0,2240, přičemž kritická hodnota pro 5% hladinu významnosti je 0,463. Při nulové hypotéze stacionarity tedy hypotézu nezamítáme. Zaměříme se nyní na deskriptivní statistiky řady výnosů – průměrný výnos 0,0002, směrodatná odchylka 0,01535, šikmost -0,4871 a nadměrná špičatost 12,2788. Výnosy tedy nejsou normálně rozděleny již na základě hodnot šikmosti a špičatosti, tato domněnka je navíc podpořena Jarque-Bera testem (Jarque, Bera, 1981) při hodnotě 18863 a p-value velmi blízko hodnotě 0. Tento výsledek byl však očekáván, jelikož bylo ukázáno, že většina výnosů akciových indexů není normálně rozdělena, má těžké chvosty a je negativně sešikmená (Cont, 2001). Pro ilustraci uvádíme i QQ-plot a histogram výnosů, které potvrzují dřívější závěry

10 Odhady Hurstova exponentu jsou založeny na vlastním programu autora v prostředí TSP 5.0. Grafy a obrázky jsou sestaveny v R 2.9.2 a MS Office Excel 2007.

(obrázek 3 a 4). Tyto vlastnosti pouze podtrhují nutnost použití metody MBB, která je odolná vůči různým rozdělením. Zaměříme se nyní na určení Hurstova exponentu pro zkoumanou časovou řadu.

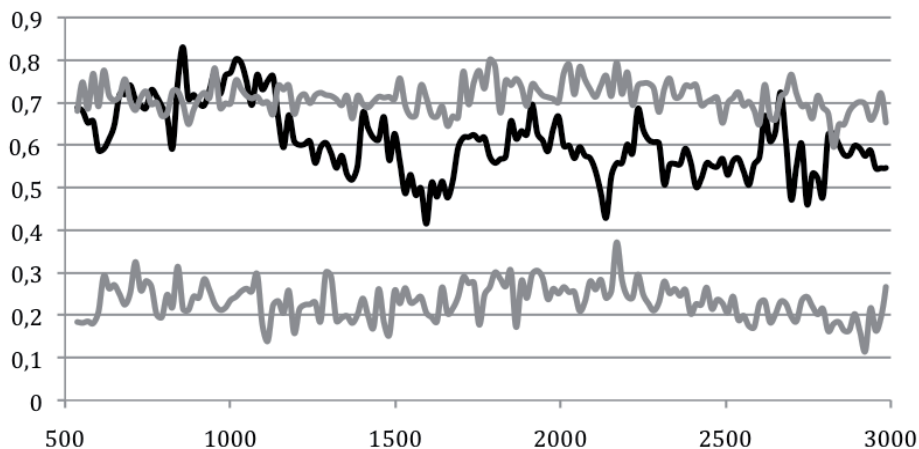
Obrázek 4  
Histogram výnosů PX



Začneme výsledky odhadu časově závislého Hurstova exponentu podle periodogramu, které jsou založeny na 512 (obrázek 5) a 1024 pozorováních (obrázek 6). Vidíme, že ve většině případů je Hurstův exponent vyšší než teoretická hodnota, která značí nezávislý proces – tedy 0,5. Na základě tohoto tvrzení však nemůžeme vyslovit zásadní závěry, jelikož 2,5% a 97,5% konfidenční intervaly založené na MBB jsou výrazně široké. Tyto konfidenční intervaly se pohybují téměř konstantě okolo 0,2 pro dolní a 0,7 pro horní konfidenční interval. Nicméně nepozorujeme výrazné trendové či podobné výkyvy pro konfidenční intervaly pro obě délky, a tedy můžeme tvrdit, že periodogramová metoda je odolná vůči změnám v rozdělení, či trendech a změnách v krátké paměti. Na druhou stranu jsou pro obě délky konfidenční intervaly velmi široké a pro 512 pozorování pak téměř stabilně pokrývají přes polovinu celého intervalu oboru hodnot  $H$ , tedy mezi 0 a 1. Pro 1024 pozorování se situace mírně zlepšuje – horní konfidenční interval zůstává blízko hodnoty 0,7, avšak dolní konfidenční interval se přiblížil hodnotě 0,3, a tedy celkově se konfidenční interval zúžil. Nicméně tento výsledek značí relativně nízkou použitelnost periodogramové metody, protože je třeba téměř extrémních hodnot Hurstova exponentu, abychom mohli zamítnout nulovou hypotézu o nepřítomnosti dlouhé paměti v testované časové řadě.

Obrázek 5

Časově závislý Hurstův exponent (periodogram, 512 pozorování)

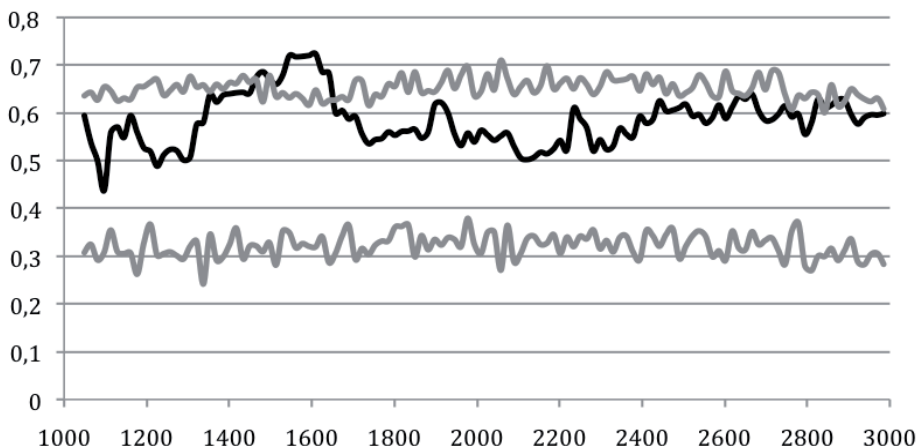


I přes široké konfidenční intervaly existují období, pro které můžeme nepřítomnost procesu s dlouhou pamětí zamítnout, a to od dubna 2000 do dubna 2002, tedy dva roky. Po tyto dva roky byl trh více předvídatelný, což je možné interpretovat jako méně efektivní. Tato predikovatelnost však po těchto dvou letech zmizela a index PX se až na krátká období nedal úspěšně predikovat. Je však třeba poznamenat, že hodnoty Hurstova exponentu zůstaly blízko hornímu konfidenčnímu intervalu. Situace je trochu odlišná pro situaci, kdy bylo pro odhad Hurstova exponentu použito 1024 pozorování. Pro tento případ je období, kdy byl trh signifikantně persistentní, výrazně kratší a navíc časově později – od července do prosince 2003. Tento výsledek napovídá, že struktura trhu se měnila, a tedy pravidelné vzory, které bylo možné sledovat při 512 pozorování, již nebyly tak výrazné pro delší období. Nicméně tyto vzorce hlavně v průběhu roku 2002 byly silné a projevíly se i v odhadu Hurstova exponentu pro delší období. Výsledky je však nutné porovnat s odhady podle metody přeškálovaných rozsahů.

Odhady časově závislého Hurstova exponentu podle R/S společně s 2,5% a 97,5% konfidenčními intervaly jsou ukázány na obrázku 7 a 8 pro 512 a 1024 pozorování v daném pořadí. Pro případ 512 pozorování sledujeme oproti metodě periodogramu dva zásadní rozdíly – konfidenční intervaly jsou výrazně užší, ale nechovají se konstantně v čase.

Obrázek 6

Časově závislý Hurstův exponent (periodogram, 1024 pozorování)



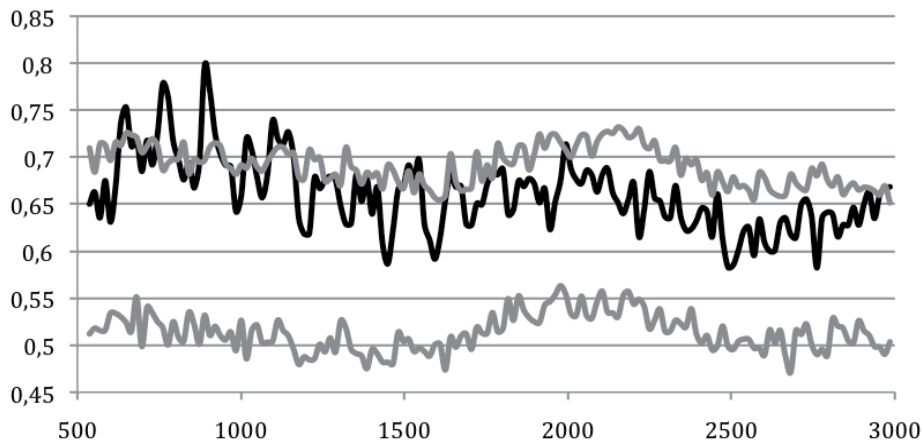
Dolní konfidenční interval ve většině případů přesahuje hodnotu 0,5, a tedy i pro promíchanou časovou řadu bychom pouhým srovnáním odhadu s kritickou hodnotou považovali výraznou část časových řad za persistentní. Pro případ, kdy odhadujeme Hurstův exponent přes 1024 pozorování, je situace výrazně dramatičtější, jelikož dolní konfidenční interval je téměř ve všech případech nad kritickou hodnotou 0,5. Tato pozorování pouze potvrzují nutnost použití konfidenčních intervalů podle metody MBB, která zanechává v řadě většinu statistických vlastností jako krátkou paměť, heteroskedasticitu, trendovost, či rozdělení s těžkými chvosty a nenulovou šikmostí, ale přetrvává dlouhodobé korelace a vzory, tedy dlouhou paměť.

Pro 512 pozorování navíc pro R/S pozorujeme měnící se chování konfidenčních intervalů v čase. Tento jev lze interpretovat jako měnící se strukturu krátkodobých korelací, tedy krátké paměti, ať už ve výnosech samotných, či volatilitě. Podobný vývoj se však vytrácí pro konfidenční intervaly pro Hurstův exponent založený na 1024 pozorování. Takový výsledek je však v souladu s očekávanými, kdy se měnící krátkodobé korelace pro delší období vyruší a nejsou pak globální.

Celkově se tak R/S metoda zdá efektivnější pro testování hypotézy o nepřítomnosti dlouhé paměti ve finančních časových řadách, jelikož konfidenční intervaly pro R/S jsou široké pouze 20% a 15% z celkového oboru hodnot Hurstova exponentu pro 512 a 1024 pozorování v daném pořadí.

Obrázek 7

## Časově závislý Hurstův exponent (R/S, 512 pozorování)

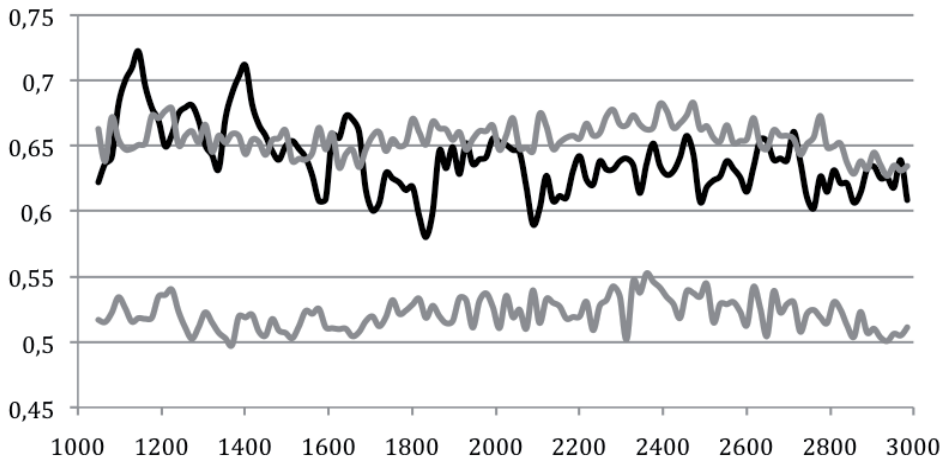


Zaměříme se nyní na vývoj samotného Hurstova exponentu pro R/S. Pro  $H$  založeném na 512 pozorováních jsou výsledky velmi podobné těm, které jsou založeny na peridogramu – výnosy indexu PX byly mezi dubnem 2000 a dubnem 2002 signifikantně persistentní, a tedy lépe predikovatelné. Po tomto období nemůžeme na 5% hladině významnosti, až na několik krátkých období, zamítnout hypotézu o nepřítomnosti dlouhé paměti v procesu výnosů. Hodnoty Hurstova exponentu však opět zůstávají velice blízko hornímu konfidenčnímu intervalu po téměř celé sledované období. Pro odhady Hurstova exponentu s 1024 pozorováními dostáváme částečně odlišné výsledky – výnosy indexu PX byly predikovatelné až do roku 2003, avšak samotná persistence je nalezena již dříve.

Je však nutné si uvědomit, že Hurstův exponent nepopisuje dynamiku pouze pro jedno dané období, ale pro celý úsek, na němž je odhadován. Pro  $H$ , které je založeno na 512 pozorováních, musíme tedy připočítat navíc dva obchodní roky a pro 1024 dokonce čtyři. Tím se dostáváme do relativně konzistentního výsledku, že index byl mezi roky 1998 a 2003 signifikantně persistentní se zeslabující tendencí a po tomto období nemůžeme zamítnout hypotézu o nepřítomnosti dlouhé paměti ve zkoumaném procesu. Na základě tohoto specifického testu můžeme tvrdit, že index PX se v čase stával méně predikovatelným, více náhodným, a tedy i efektivnějším. Takový výsledek souhlasí s očekáváním, tedy že index byl zpočátku předvídatelný, ale při nárůstu zájmu o obchodování a nárůstu obchodníků se tyto příležitosti zeslabovaly. Nicméně nesmíme opomenout fakt, že pro obě metody i obě použité délky časové řady pro odhad Hurstova exponentu i po roce 2003 zůstává exponent velmi blízko hornímu konfidenčnímu intervalu, který odděluje persistentní od nepersistentního procesu.

Obrázek 8

Časově závislý Hurstův exponent (R/S, 1024 pozorování)



Pokud navíc srovnáme dvě použité metody pouze z hlediska jejich efektivity, jasným vítězem je metoda přeškálovaných rozsahů, jelikož její konfidenční intervaly jsou výrazně užší ve srovnání s periodogramovou metodou. Navíc jsou tyto intervaly i výrazně užší než intervaly, které byly prezentovány v různých studiích založených na Monte Carlo simulacích (např. Weron, 2002; Couillard, Davison, 2005; a Křišťoufek, 2009). Tento výsledek značí, že je metoda citlivější na samotná data než na krátkodobé závislosti či heteroskedasticitu. Totéž nelze tvrdit o periodogramové metodě. Celkově ovšem pro periodogramovou metodu konstatujeme, že její použitelnost pro daný typ dat je omezený, jelikož pro zamítnutí hypotézy o nepřítomnosti procesu s dlouhou pamětí je potřeba extrémních hodnot odhadu Hurstova exponentu.

## Závěr

V článku jsme se zaměřili na detekci procesu s dlouhou pamětí ve výnosech burzovního indexu PX mezi roky 1997 a 2009. Ukázali jsme, že index prošel vývojem z persistentního procesu do procesu, kde dlouhá paměť nebyla statisticky ukázána. Nicméně nepřítomnost dlouhé paměti ve výnosech je relativně křehká, jelikož se hodnoty Hurstova exponentu drží velmi blízko konfidenčního intervalu, který značí signifikantně persistentní proces. Jelikož jsme použili metodu promíchávání s pohyblivými bloky, jsou výsledky robustní vůči krátké paměti, heteroskedasticitě, trendování a různým rozdělením. Zkonstruované konfidenční intervaly navíc napověděly, že ve vývoji chování výnosů hrály důležitou roli i procesy s krátkou pamětí. Výsledky jsou v rozporu s většinou z ostatních článků, které testují dlouhou paměť v indexu PX a tvrdí, že index je signifikantně persistentní dlouhodobě, a to i v současných letech. Tyto články však neberou v úvahu možné vychýlení krátkou pamětí a ostatními statistickými charakteristikami ve zkoumané řadě.

## Literatura

- ALFI, V.; COCETTI, F.; MAROTTA, M.; PETRI, A.; PIETRONERO, L. 2008. Exact Results for the Roughness of a Finite Size Random Walk. *Physica A*. 2008, Vol. 370, No. 1.
- ALPTEKIN, N. 2006. Long Memory Analysis of USD/TRL Exchange Rate, *International Journal of Social Sciences*. 2006, Vol. 1, No. 2.
- ALVAREZ-RAMIREZ, J.; RODRIGUEZ, E.; ECHEVERRIA, J. 2005. Detrending fluctuation analysis based on moving average filtering. *Physica A*. 2005, Vol. 354.
- BARKOULAS, J.; BAUM, CH.; TRAVLOS, N. 2000. Long memory in the Greek stock market. *Applied Financial Economics*. 2000, Vol. 10.
- BARUNÍK. 2008. How Do Neural Networks Enhance the Predictability of Central European Stock Returns? *Finance a úvěr - Czech Journal of Economics and Finance*. 2008, Vol. 58, No. 7-8.
- BASHAN, A.; BARTSCH, R.; KANTELHARDT, J.; HAVLIN, S. 2008. Comparison of detrending methods for fluctuation analysis. arXiv:0804.4081
- BERAN, J. 1994. *Statistics for Long-Memory Processes, Monographs on Statistics and Applied Probability 61*. New York: Chapman & Hall, 1994. ISBN 978-0412049019.
- CAJUEIRO, D.; TABAK, B. 2006. Testing for predictability in equity returns for European transition markets. *Economic Systems*. 2006, Vol. 30.
- CONT, R. 2001. Empirical properties of asset returns: stylized facts and statistical issues. *Quantitative Finance*. 2001, Vol. 1, No. 2.
- COUILLARD, M; DAVIDSON, M. 2005. A comment on measuring the Hurst exponent of financial time series. *Physica A*. 2005, Vol. 348.
- DI MATTEO, T. 2007. Multi-scaling in Finance. *Quantitative Finance*. 2007, Vol. 7, No. 1.
- DIVIŠ, K.; TEPLÝ, P. 2005. Informační efektivnost burzovních trhů ve střední Evropě. *Finance a úvěr – Czech Journal of Economics and Finance*. 2005, Vol. 55, No. 9-10.
- DÜLGER, F.; OZDEMIR, Z. 2005. Current Account Sustainability in Seven Developed Countries. *Journal of Economic and Social Research*. 2005, Vol. 7, No. 2.
- EFRON, B. 1979. Bootstrap methods: Another look at the jackknife. *Annals of Statistics*. 1979, Vol. 7.
- EICHNER, J.; KANTELHARDT, J.; BUNDE, A.; HAVLIN, S. 2007. Statistics of return intervals in long-term correlated records. *Physical Review E*. 2007, Vol. 75.
- EINSTEIN, A.; WU, H.-S.; GIL, J. 2001. Detrended fluctuation analysis of chromatin texture for diagnosis in breast cytology. *Fractals*. 2001, Vol. 9, No. 4.
- EMBRECHTS, P.; MAEJIMA, M. 2002. *Selfsimilar Processes*, New Jersey: Princeton University Press, 2002. ISBN 978-0691096278.
- GEWEKE, J.; PORTER-HUDAK, S. 1983. The estimation and application of long memory time series models. *Journal of Time Series Analysis*. 1983, Vol. 4, No. 4.
- GRECH, D.; MAZUR, Z. 2004. Can one make any crash prediction in finance using the local Hurst exponent idea? *Physica A*. 2004, Vol. 336.
- HÁJEK, J. 2007. Test slabé formy efektivnosti středoevropských akciových trhů. *Politická ekonomie*. 2007, Vol. 55, No. 6, pp. 773–791.
- HURST, H. E. 1951. Long term storage capacity of reservoirs. *Transactions of the American Society of Engineers*. 1951, Vol. 116.
- JANDA, K. 1994. Modelling Risks of Share Portfolio (in Czech with English summary). *Finance a úvěr*. 1994, Vol. 44, No. 9.
- JANDA, K.; SVÁROVSKÁ, B. 2009. Investing into Microfinance Investment Funds. Working Papers IES 2009/32, Charles University Prague, Faculty of Social Sciences, Institute of Economic Studies. 2009.
- JANDA, K.; SVÁROVSKÁ, B. 2009. Investing into Microfinance. *Journal of Business Economics and Management*. 2010 forthcoming, Vol. 10.
- JARQUE, C.; BERA, A. 1981. Efficient tests for normality, homoscedasticity and serial independence of regression residuals: Monte Carlo evidence. *Economics Letters*. 1981, Vol. 7, No. 4.

- KRIŠTOUFEK, L. 2009. Classical and modified rescaled range analysis: Sampling properties under heavy tails. Working Papers IES 2009/26, Charles University Prague, Faculty of Social Sciences, Institute of Economic Studies. 2009.
- KWIATKOWSKI, D.; PHILLIPS, P.; SCHMIDT, P.; SHIN, Y. 1992. Testing the null of stationarity against the alternative of a unit root: How sure are we that the economic time series have a unit root? *Journal of Econometrics*. 1992, Vol. 54.
- LILLO, F.; FARMER, J. 2004. The Long Memory of the Efficient Market. *Studies in Nonlinear Dynamics & Econometrics*. 2004, Vol. 8, No. 3.
- LO, A.; MACKINLAY, C. 1999. *A Non-Random Walk Down Wall Street*. New Jersey: Princeton University Press, 1999. ISBN 0-691-09256-7.
- LO, A. 1991. Long-term memory in stock market prices. *Econometrica*. 1991, Vol. 59, No. 5.
- LUX, T. 2007. Applications of Statistical Physics in Finance and Economics. Economics Working Paper, Christian-Albrechts-Universität Kiel. 2007, No 2007-05.
- MANDELBROT, B.; VAN NESS, J. 1968. Fractional Brownian motions, fractional noises and applications. *SIAM Review*. 1968, Vol. 10, No. 422.
- MANDELBROT, B.; WALLIS, R. 1969. Robustness of the rescaled range R/S in the measurement of noncyclic long-run statistical dependence. *Water Resources Research*. 1999, Vol. 5.
- MANDELBROT, B. 1970. Analysis of long-run dependence in economics: the R/S technique. *Econometrica*. 1970, Vol. 39.
- MANDELBROT, B. 1972. Statistical methodology for non-periodic cycles: from covariance to R/S analysis. *Annals of Economic and Social Measurement*. 1972, Vol. 1.
- MATOS, J.; GAMA, S.; RUSKIN, H.; SHARKASI, A.; CRANE, M. 2008. Time and scale Hurst exponent analysis for financial markets. *Physica A*. 2008, Vol. 387, No. 15.
- MCKENZIE, M. 2002. Non-periodic Australian Stock Market Cycles: Evidence from Rescaled Range Analysis. *Economic Record*. 2002, Vol. 73, No. 239.
- PETERS, E. 1994. *Fractal Market Analysis – Applying Chaos Theory to Investment and Analysis*. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1994. ISBN 978-0471585244.
- SAMORODNITSKY, G. 2006. *Long Range Dependence*, Now Publishers Inc., 2007. ISBN 978-1601980908.
- SRINIVAS, V.; SRINIVASAN, K. 2000. Post-blackening approach for modeling dependent annual streamflows. *Journal of Hydrology*. 2000, Vol. 230.
- TAQQU, M.; TEVEROSKY, W.; WILLINGER, W. 1995. Estimators for long-range dependence: an empirical study. *Fractals*. 1995, Vol. 3, No. 4.
- TEVEROVSKY, V.; TAQQU, M.; WILLINGER, W. 1999. A critical look at Lo's modified R/S statistic. *Journal of Statistical Planning and Inference*. 1999, Vol. 80, No. 1-2.
- TRAN, Q. 2007. Testing the Weak Form of Efficient Market Hypothesis for the Czech Stock Market. *Politická ekonomie*. 2007, Vol. 55, No. 6, pp. 751–772.
- TRAN, Q. 2005. The Fractal Market Analysis and Its Application on Czech Conditions. *Acta Oeconomica Pragensia*. 2005, Vol. 13., No. 1.
- VANDEWALLE, N.; AUSLOOS, M.; BOVEROUX, PH. 1997. Detrended Fluctuation Analysis of the Foreign Exchange Market. *Econophysic Workshop*, Budapest, Hungary, 1997.
- WANG, W.; VAN GELDER, P.; VRIJLING, J.; CHEN, X. 2006. Detecting long-memory: Monte Carlo simulations and application to daily streamflow processes. *Hydrology and Earth System Sciences Discussions*. 2006, Vol. 3.
- WERON, R. 2002. Estimating long-range dependence: finite sample properties and confidence intervals. *Physica A*. 2002, Vol. 312.
- WERON, R. 2001. Measuring long-range dependence in electricity prices. arXiv:cond-mat/0103621v1.
- ZHUANG, Y.; GREEN, CH.; MAGGIONI, P. 2000. The Great Rebound, The Great Crash, and Persistence in British Stock Prices. Economic Research Paper, Loughborough University. 2000, No. 00/11.



# LONG-TERM MEMORY AND ITS EVOLUTION IN RETURNS OF STOCK INDEX PX BETWEEN 1997 AND 2009

Ladislav Krištofuk, IES, Faculty of Social Sciences, Charles University in Prague, Smetanovo nábřeží 6, CZ – 110 01 Prague 1; UTIA, Academy of Sciences of the Czech Republic, Pod Vodárenskou věží 4, CZ – 182 08 Prague 8 (kristoufek@ies-prague.org).

---

## Abstract

Long-term memory processes have been extensively examined in recent literature as they provide simple way to test for predictability in the underlying process. However, most of the literature interprets the results of estimated Hurst exponent simply by its comparison to its asymptotic limit of 0.5. Therefore, we use moving block bootstrap method for rescaled range and periodogram method. In our analysis of evolution of Hurst exponent between 1997 and 2009, we show that PX experienced persistent behavior which weakened in time. Nevertheless, the returns of PX remain close to confidence interval separating independent and persistent behavior.

## Keywords

econophysics, long-range dependence, time series analysis, rescaled range, periodogram

## JEL Classification

G1, G10, G14, G15